

LDL^T分解時の行列式の微分を利用した 弧長法における特異点の解析

柏木光博* 田中聖人* 大友 篤* 鹿田光一**

Analysis of the Singular Point in the Arc Length Method Using Differential of Determinant in LDL^T Decomposition

by

Mitsuhiro KASHIWAGI, Seijin TANAKA, Atsushi OHTOMO and Koichi SHIKATA.

(Received: September 22, 2011, Accepted: February 24, 2012)

Abstract

This paper proposes a method for the numerical solution of large deflection structural problems involving finite strains, subject to exhibiting inelastic constitutive response. This method computes the singular point in the arc length method using differential of determinant in LDL^T decomposition. Outputs of numerical examples show that the proposed idea works well and the buckling mode may be computed from the direct linear equation without additional computational costs.

1. はじめに

有限要素法などを使った計算力学の研究開発は、今や世界の第一線のレベルに到達し、活発な研究開発が展開されている^{1),6),7)}。また解析も線形解析だけでなく、非線形解析を行う必要性が生じますます煩雑化している。有限要素法の基礎式あるいは境界条件の非線形性に起因してさまざまな非線形問題が発生する。例えば、相当応力が降伏点を越え塑性変形を伴うと、応力・ひずみ関係式は非線形となり、このような非線形問題は材料非線形問題と呼ばれている。また、大たわみ問題(有限変形問題)あるいは座屈問題(構造安定問題)のようにひずみ・変位関係として非線形式が仮定される問題を幾何学的非線形問題と呼んでいる。ひずみ・変形関係の非線形性に起因して、構造物に不安定な平衡状態の発生を伴う問題を構造安定問題と呼んでおり、分岐座屈、飛移り座屈、屈服座屈などがある。これらの構造安定問題の解析においては、分岐点や極限点近傍における特異点の数値的取り扱いが問題となる¹⁾⁹⁾。

非線形解析には局所線形化による増分法がよく使われており、荷重増分法や変位増分法および弧長

法(弧長増分法)などがある。荷重増分法は荷重モードに対する増分量を適切に設定し、逐次的に解いていく方法であるが、極限点を越えたつりあい経路を追跡することは不可能である。変位増分法は適切な変位増分量に関する右辺に対して荷重パラメータの増分量と変位増分箇所以外の変位を求める方法であり、極限点を越えたつりあい経路を追跡することが可能である。しかし、変位増分量が不明の場合はこの方法による解析はできない。弧長法は荷重増分法の欠点をなくすように適切な弧長を設定することにより特異点を含むつりあい経路の追跡に有効な方法である。いずれの方法もニュートン・ラフソン法を基本としており、接線剛性行列の取り方により修正ニュートン法や準修正ニュートン法およびその加速版がある。藤井などは接線剛性行列の特異点近傍 LDL^T 分解時 (L は左下三角行列, D は対角行列, T は転置) のモードが固有モードに近接していることを利用して特異点を探索する方法を提案している⁸⁾。

柏木は、共役勾配法の理論の中の係数行列の逆行列算定式とトレース理論を使って固有値問題の行列式の固有値による微分式を提案した¹⁰⁾。そこでの提案式は共役勾配法などの反復法用でありコレス

* 産業工学部教授 ** 産業工学部准教授

キー分解などの直接法には使えない。ここでは、共役勾配法に関する式¹⁰⁾を参考にして、直接法の代表的解法である LDL^T 分解時に行列式の微分を求められることを示す。また、提案式を弧長法に取り入れ分岐点や極限点などの特異点を正確に求める方法を述べている。そこでは、行列式の微分の符号が変化した時点で、2分法などを使い範囲を狭めながら特異点を特定できる。また、ニュートン・ラフソン法における解は行列式の微分によって変化するので、それを弧長として利用している。弧長の設定が自動化できるので、弧長法への影響が大きい基本的パラメーターを減らすことができる。しかし、提案式と共にひずみや相当ひずみ量の最大値の絶対値を制限する必要がある。提案法は密行列の LDL^T 分解や密行列に比べ記憶容量を大幅に節約できるバンド行列の LDL^T 分解を対象としている。以下に、その理論とプログラムおよびアルゴリズムを示す。また、提案法の妥当性を立体トラス（半谷モデル）の数値実験を通して検証する。

2. LDL^T分解時の行列式の微分

固有値問題は次のように表される。 \tilde{A} を $n \times n$ の実対称行列（有限要素法などでは接線剛性行列と呼ばれる）とすると、標準固有値問題は

$$\tilde{A}x = \lambda x \quad (2.1)$$

として示される。ここに、 λ は固有値を、 x は固有ベクトルを表している。式(2.1)が自明な解をもつためには、 $\tilde{A} - \lambda I$ が特異でなければならないので

$$\det[\tilde{A} - \lambda I] = 0 \quad (2.2)$$

ここで、 $f(\lambda)$ を以下のようにおく。

$$f(\lambda) = \det[\tilde{A} - \lambda I] \quad (2.3)$$

トレース理論によって

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \text{trace} \left[[\tilde{A} - \lambda I]^{-1} [\tilde{A} - \lambda I]' \right] = -\text{trace} \left[[\tilde{A} - \lambda I]^{-1} \right] \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} A &= \tilde{A} - \lambda I \\ &= [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & \text{sym.} & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

とおく。 LDL^T 分解時には

$$A = LDL^T \quad (2.6)$$

になる。ここに、

$$L = [\ell_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ \ell_{n1} \cdots \ell_{n(n-1)} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$D = [d_{ij}] = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

L^{-1} を以下のようにおく。

$$L^{-1} = [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ g_{21} & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ g_{n1} \cdots g_{n(n-1)} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$LL^{-1} = I \quad (I \text{ は単位行列}) \text{ を展開して整理すると,} \\ g_{ij} = -\ell_{ij} - \ell_{i2} g_{2j} - \ell_{i3} g_{3j} - \cdots - \ell_{i(i-1)} g_{(i-1)j} \quad (2.10)$$

式(2.10)から、 g_{ij} は全要素について計算する必要があるが、バンド幅外の要素については $\ell_{ij} = 0$ となるので、バンド幅内の ℓ_{ij} を使って計算できる。また、バンド幅が狭いほど計算時間は短くなる。

行列式の微分は、式(2.4)より、式(2.6)の逆行列の対角要素だけを求めて加算すればよい。式(2.7),(2.8),(2.9)から、 $[L^T]^{-1} D^{-1} L^{-1}$ を展開し対角要素の和を求めると、式(2.4)は以下ようになる。

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{d_{ii}} + \sum_{k=i+1}^n \frac{g_{ki}^2}{d_{kk}} \right) \quad (2.11)$$

以上から、行列式の微分には修正コレスキー分解時の D 行列と L 行列の逆行列の要素から成っていることが分かる。上述のように、バンド幅内の要素を使って計算できるので、密行列の計算を、あたかもバンド行列の計算をするかのようにできる。よって、バンド行列の計算時間と比べてもそれほどの増加にならないことが予想される。

LDL^T 分解プログラムに補足したプログラムにより、簡単に f'/f が得られる。この値は大変位弾塑性有限要素解析などに対し、ニュートン・ラフソン法による極限点や分岐点の数値解析に便利に利用できる。従来、この種の探索は固有値問題を解く必要があり、解析時の負担は膨大であった。しかし、提案法は連立一次方程式を解く過程で簡単に求めることができる方法となっている。

提案法のアルゴリズムを示す代わりに Fortran によるサブルーチンプログラムを記した。ただし、ここでは、数値解析に対しては Fortran が最も適してい

ること、および、注釈行と継続行の修正後、上位バージョンの Fortran にも利用できることから Fortran77 によるプログラムとした。

最初に、密行列に対するプログラムを示す。

```

C-----
C
C  ** Triangular LDLt decomposition for full matrix
C
C  input
C  A : given symmetric coefficient matrix
C      2-dimension array as A(NN,N)
C  B : work vector, 1-dimension array as B(N)
C  NN : given adjustable dimension for array A
C  N : given order of matrix A and vector B
C  EPS : parameter to check singularity of the matrix output
C  output
C  A : L matrix and D matrix, 2-dimension array as A(NN,N)
C  FD : differential of determinant
C  ICHG : numbers of minus element of diagonal matrix D
C      (numbers of eigenvalue)
C  IERR : error code
C      =0, for normal execution
C      =1, for singularity
C
SUBROUTINE LDLV(NN,N,A,B,FD,EPS,ICHG,IERR)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(NN,N),B(N)
C
LDLt decomposition
ICHG=0
DO I=1,N
C
d(i,i)
DO K=1,I-1
A(I,I)=A(I,I)-A(K,K)*A(I,K)**2
END DO
IF (A(I,I).LT.0.D0) ICHG=ICHG+1
IF (DABS(A(I,I)).LT.EPS) THEN
IERR=1
RETURN
END IF
C
l(i,j)
DO J=I+1,N
DO K=1,I-1
A(J,I)=A(J,I)-A(J,K)*A(K,K)*A(I,K)

```

```

END DO
A(J,I)=A(J,I)/A(I,I)
END DO
END DO
IERR=0
C
FD=0.D0
DO I=1,N
C
(i,i)
FD=FD-1.D0/A(I,I)
C
(i,j)
DO J=I+1,N
B(J)=-A(J,I)
DO K=1,I-1
B(J)=B(J)-A(J,I+K)*B(I+K)
END DO
FD=FD-B(J)*B(J)/A(I,J)
END DO
END DO
C
RETURN
END
C-----
C
C  ** Solution of linear equation by LDLt for full matrix
C
C  input
C  A : L matrix and D matrix, 2-dimension array as A(NN,N)
C  B : given right hand side vector, 1-dimension array as B(N)
C  NN : given adjustable dimension for array A
C  N : given order of matrix A and vector B
C  output
C  B : work and solution vector, 1-dimension array as B(N)
C
SUBROUTINE SOLV(NN,N,A,B)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(NN,N),B(N)
C
forward substitution
DO I=1,N
DO J=I+1,N
B(J)=B(J)-A(J,I)*B(I)
END DO
END DO
C

```

```

C backward substitution
DO I=1,N
  B(I)=B(I)/A(I,I)
END DO
DO I=1,N
  II=N-I+1
  DO J=1,II-1
    B(J)=B(J)-A(II,J)*B(II)
  END DO
END DO
C
RETURN
END

```

C-----

次に、バンド行列に対するプログラムを示す。以下にバンド行列の概要を図-1に示す。ここに、 nq は対角要素を含むバンド幅を示している。

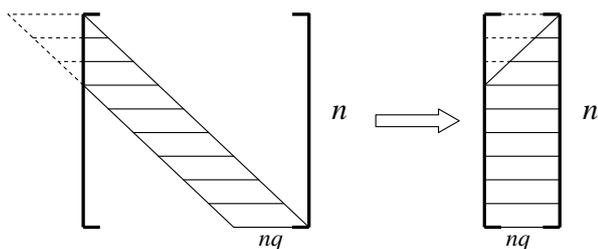


図-1 バンド行列

C-----

```

C
C ** Triangular LDLt decomposition for band matrix
C
C input
C A : given coefficient band matrix
C 2-dimension array as A(NN,NQ)
C B : work vector, 1-dimension array as B(N)
C NN : given adjustable dimension for array A
C N : given order of matrix A
C NQ : given half band width of matrix A
C EPS : parameter to check singularity of the matrix
C output
C A : L matrix and D matrix, 2-dimension array as A(NN,NQ)
C FD : differential of determinant
C ICHG : numbers of minus element of diagonal matrix D
C (numbers of eigenvalue)
C IERR : error code

```

```

C =0, for normal execution
C =1, for singularity
C
SUBROUTINE MCDHB(NN,N,NQ, A,B,FD,S,ICHG,IERR)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(NN,NQ),B(N)
C
LDLt decomposition
ICHG=0
DO I=1,N
C
d(i,i)
DO J=MAX(1,I-NQ+1),I-1
  A(I,NQ)=A(I,NQ) -A(J,NQ)*A(I,NQ+J-I)**2
END DO
IF (A(I,NQ).LT.0.D0) ICHG=ICHG+1
IF (DABS(A(I,NQ)).LT.EPS) THEN
  IERR=1
  RETURN
END IF
C
l(i,j) : i>j
C
vertical decomp.
DO J=I+1,MIN(I+NQ-1,N)
  AA=A(J,NQ+I-J)
  DO K=MAX(1,J-NQ+1),I-1
    AA=AA- A(I,NQ+K-I)*A(K,NQ)*A(J,NQ+K-J)
  END DO
  A(J,NQ+I-J)=AA/A(I,NQ)
END DO
C
END DO
IERR=0
C
FD=0.D0
DO I=1,N
C
(i,i)
FD=FD-1.D0/A(I,NQ)
C
(i,j)
DO J=I+1,MIN(I+NQ-1,N)
  B(J)=-A(J,NQ-(J-I))
  DO K=1,J-I-1
    B(J)=B(J)-A(J,NQ-(J-I)+K)*B(I+K)
  END DO
  FD=FD-B(J)*B(J)/A(J,NQ)
END DO
DO J=I+NQ,N

```

```

B(J)=0.D0
DO K=1,NQ-1
  B(J)=B(J)-A(J,K)*B(J-NQ+K)
END DO
FD=FD-B(J)*B(J)/A(J,NQ)
END DO
END DO
C
RETURN
END
C-----
C ** Solution of linear equation by LDLt for band matrix
C
C input
C A : given decomposed coefficient band matrix
C 2-dimension array as A(NN,NQ)
C B : given right hand side vector, 1-dimension array as B(N)
C NN : given adjustable dimension for array A
C N : given order of matrix A and vector B
C NQ : given half band width of matrix A
C output
C B : solution vector, 1-dimension array as B(N)
C
SUBROUTINE SOLHBB(NN,N,NQ,A,B)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(NN,NQ),B(N)
C
C forward substitution
DO I=1,N
  DO J=MAX(1,I-NQ+1),I-1
    B(I)=B(I)-A(I,NQ+J-I)*B(J)
  END DO
END DO
C
C backward substitution
DO I=1,N
  II=N-I+1
  B(II)=B(II)/A(II,NQ)
  DO J=II+1,MIN(N,II+NQ-1)
    B(II)=B(II)-A(J,NQ+II-J)*B(J)
  END DO
END DO
C
RETURN
END

```

C-----

3. 提案法による非線形 FEM のアルゴリズム

非線形有限要素法における特異点の行列式は 0 であり、固有値も 0 である。行列式の固有値に関する微分式があれば、特異点の近傍では微分の符号が変化するので特異点の探索は容易となる。弧長法をベースとして、 f'/f の符号が変化した時点で、2 分法などを使い範囲を狭めながら特異点を特定できる。もちろん LDL^T 分解時の対角行列 D の負の個数によっても計算できる。また、ニュートン・ラフソン法における解は $1/(f'/f)$ によって変化するので、 $|1/(f'/f)|$ を弧長として利用できる。弧長の設定が自動化できるので、弧長法への影響が大きい基本的パラメーターを減らすことができる。しかし、筆者のこれまでの数値実験から、分岐点や極限点などの特異点を正確に求めるには、 $|1/(f'/f)|$ と共にひずみや相当ひずみ量の最大値の絶対値を制限する必要がある。例えば、鋼材を使う場合は、降伏ひずみのある数値で除した値（ひずみ制限値）で制限することになる。よって、 $|1/(f'/f)|$ とひずみ制限値の小さい方を利用すれば正確に特異点を探索できる。特に上述の事項を考慮すると以下のような主経路の途中で特異点を求める弧長法のアルゴリズムを得る。

(1) step=0

① データ設定あるいは入力（増分時収束率、最大ステップ数、1 ステップでの最大反復回数、弾性解析と弾塑性解析の区別、ひずみ制限値用分割個数、 LDL^T 分解時特異性判定値、弾性係数や塑性に関するパラメーター、節点座標、各要素特性、境界条件など）

② バンド幅の計算

③ 配列などの初期化

④ 外力ベクトルの設定あるいは入力

(2) step=1,2,3,...

1) iteration=0

⑤ 前ステップの情報（節点座標、断面性能、変位、ひずみ度、応力、 f'/f 、...）を記憶

⑥ 接線剛性行列の計算

2) iteration=1,2,3,...

⑦ LDL^T 分解（ f'/f と対角行列 D の負の個数計算を含む）および連立 1 次方程式の解算出

- ⑧弧長法による値と $1/|f'/f|$ の絶対値の小さい方を弧長とする. 反復時ひずみ度の最大値がひずみ制限値を超えないように調整. 増分ひずみと全ひずみを計算
- ⑨構成則により任意点での材料剛性や応力などを計算
- ⑩接線剛性行列の計算
- ⑪残差 (不つりあい量) の計算と収束チェック
- ⑫収束していなければ 2)へ. 収束していれば, f'/f の符号の変化があった場合, 2 分法により特異点を探す. 十分な精度の特異点が得られたら, LDL^T分解時の対角行列 D の負の個数により確認し, 次ステップ(2)へ進む. ただし, 最大ステップ数に達した場合, 計算をストップする

4. 数値実験

LDL^T分解時の行列式の微分の弧長法への有効性を示すために, 立体トラス (半谷モデル^{4),5,8}), 図-2) による数値実験を行った. 図-2 から分かるように, この立体トラスは 24 部材から成り 13 節点を構成している対称架構 (X-Y 平面) である. また, 荷重は対称変形を成すように 1~7 節点に鉛直下向きに作用させ, 1 節点はそれ以外の節点荷重の 2 倍とした. ここでの数値実験は, すべて倍精度演算とし, 前節のアルゴリズムに従った. 計算には, 'Intel(R) Core™ i7 3.2GHz, RAM12.0 GB, Windows 7, gcc-4.7-20110723-64 Fortran' を使用した. また, 密行列 (式(2.4), (2.11)) とバンド行列 (式(2.11)) の 3 方法により解析し, 同一結果を得た. 提案式により f'/f を正確に求め得ることを確認した. 以降では, バンド行列による解析結果を示す.

以下にデータの設定値を記す. 増分時収束率は $TOLER = 10^{-6}$, 最大ステップ数は $NSTEP = 2000$, 1 ステップでの最大反復回数は $NITR = 20$, 弾性解析 ($IEP = 0$) と弾塑性解析 ($IEP = 1$) の両方, ひずみ制限値用分割個数 MD は 30,40,50,60 の 4 通りとした.

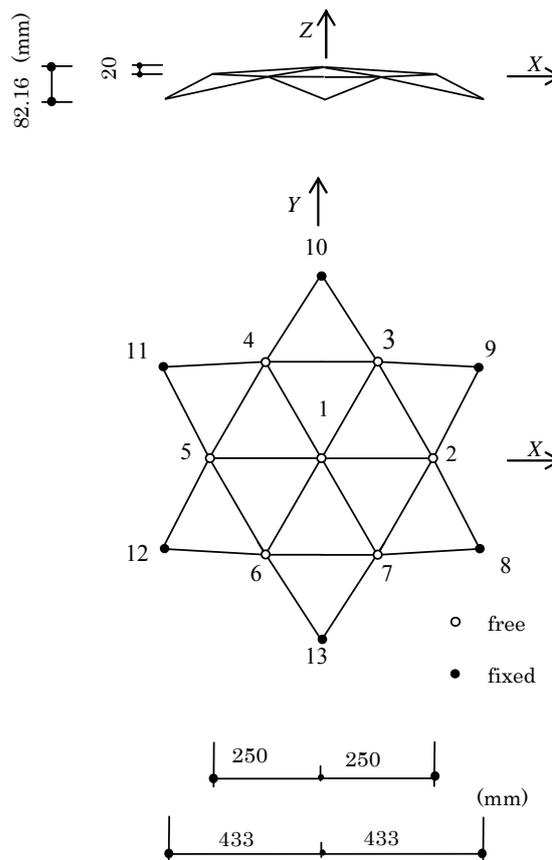


図-2 立体トラス (半谷モデル)

LDL^T分解時特異性判定値 $EPS = 10^{-12}$, 弾性係数や塑性に関するパラメーターは弾性係数 $E = 2.058 \times 10^5$ (N/mm²), 初期断面積 $A_0 = 1.0$ (mm²), ポアソン比 $\nu = 0.3$ (弾性範囲), $\nu = 0.5$ (塑性範囲), 降伏点 $\sigma_y = 235.2$ (N/mm²). ここでは, 応力をひずみ度から陽に計算できるように, 構成則は Richard-Abbott の構成則⁹⁾とした. 応力度 σ とひずみ度 ε の関係を式(4-1),(4.2)に示す.

$$\sigma = \frac{(E - E_p)\varepsilon}{\left(1 + \left|\frac{(E - E_p)\varepsilon}{\sigma_y}\right|^m\right)^{\frac{1}{m}}} + E_p\varepsilon \quad (4.1)$$

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E - E_p}{\left(1 + \left|\frac{(E - E_p)\varepsilon}{\sigma_y}\right|^m\right)^{\frac{m+1}{m}}} + E_p \quad (4.2)$$

ここに, E_p は見かけ上のひずみ硬化率を示し, 本

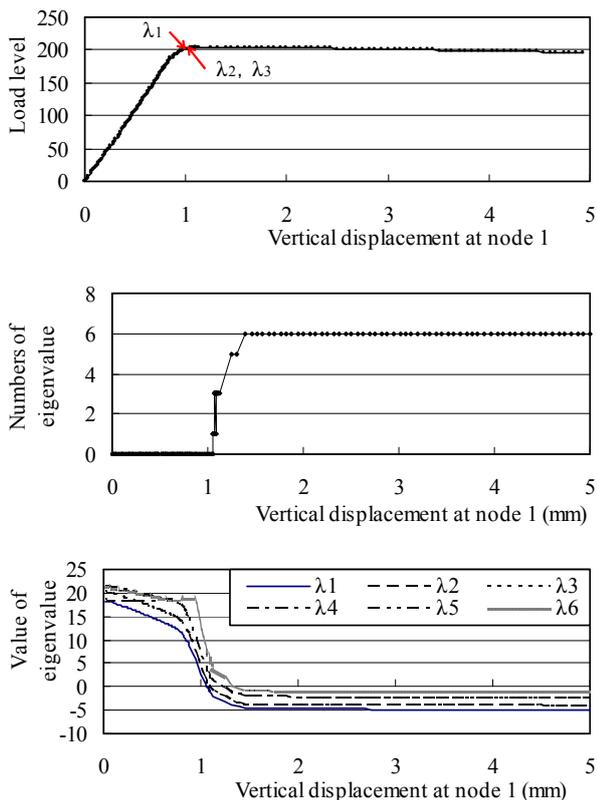


図-3 鉛直変位（節点 1）と固有値など（MD=30）

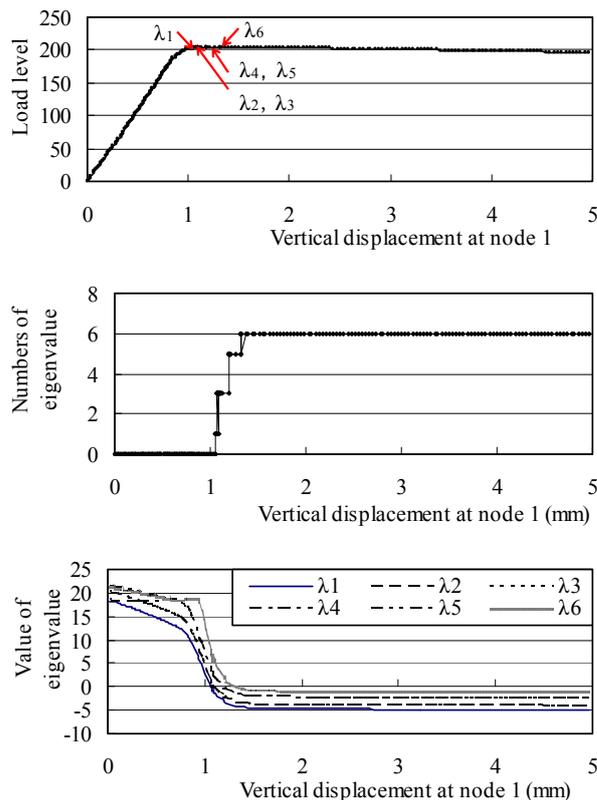


図-5 鉛直変位（節点 1）と固有値など（MD=50）

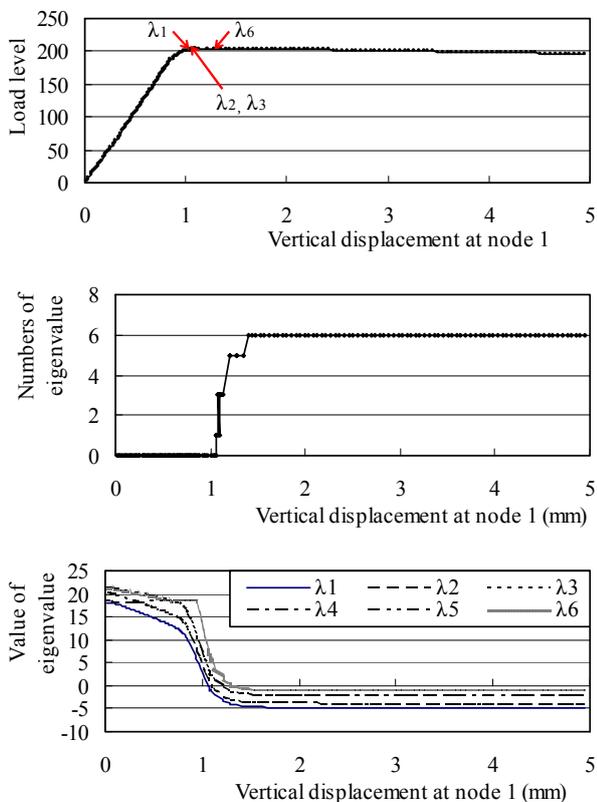


図-4 鉛直変位（節点 1）と固有値など（MD=40）

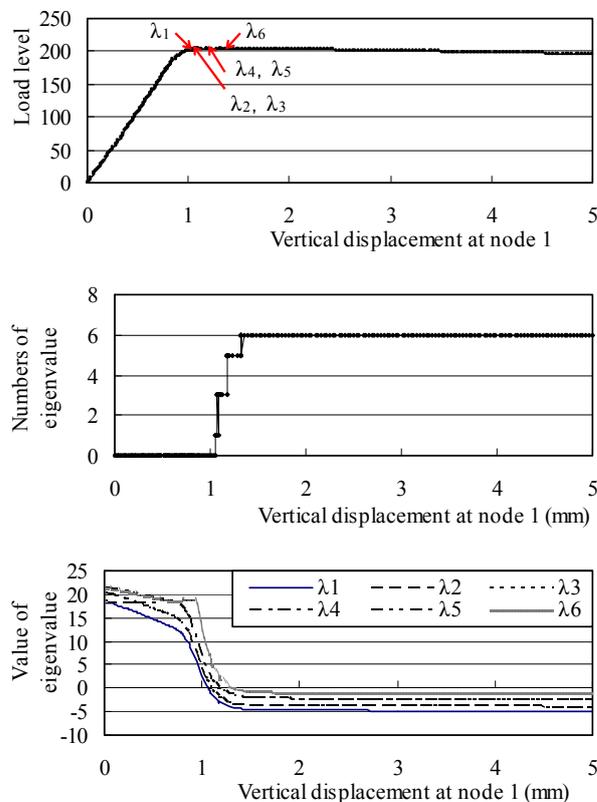


図-6 鉛直変位（節点 1）と固有値など（MD=60）

数値実験では $E_p = 0.01E$ とした. m は滑らかさの度

合いを示すパラメーターで $m=18$ とした。また、 E_t は任意の点での接線剛性である。

参考文献 2) を基にして立体トラスの接線剛性マトリクスを誘導すると以下ようになる。

$$K = \begin{bmatrix} K_0 & -K_0 \\ -K_0 & K_0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

ここに、

$$K_0 = \left[\frac{N}{\ell} I + \frac{E_t A - (1+2\nu)N}{\ell} cc^T \right] \quad (4.4)$$

$$c = \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

$$c_x = \frac{x_j - x_i}{\ell}, c_y = \frac{y_j - y_i}{\ell}, c_z = \frac{z_j - z_i}{\ell} \quad (4.6)$$

N は軸力、 i と j は部材両端の節点番号、

(x_i, y_i, z_i) と (x_j, y_j, z_j) は i, j 節点の x, y, z

座標、 ℓ は部材長である。

図-5,6 は固有値の正しい個数を描いている。極限点までに 6 個の固有値が存在し⁵⁾、6 番目の固有値が極限点のものである。図-3～図-6 は MD 毎の RAM-鉛直変位グラフを描いており、MD の変化による固有値の個数の変化を描いている。 λ_1 から λ_5 は分岐座屈点を、 λ_6 は極限点を表している。 λ_2 と λ_3 および λ_4 と λ_5 はそれぞれに重根となっている。図-3～図-6 で分かるように、全体的にはほぼ同じ経路を辿り、固有値の個数や分布に差は殆どない。しかし、MD の値が小さい場合、提案法によって求めた 0 固有値の個数に差があり (図-3 では 3 個、図-4 では 4 個、図-5,6 では 6 個)、特異点を見落としている。MD の個数が固有値の正確度に影響を及ぼすことがわかる。ここでの数値実験では、MD は 50 以上で正しい解を得ている。このように精度の良い非線形解析は数多くのステップ数を要することを示している。提案法は連立一次方程式を解く過程で簡単に求めることができる方法であり、非線形解析に便利に利用されうる方法となっている。

4. 結び

直接法の代表的解法である LDL^T 分解時に同時に行列式の微分を求められることを示した。また、提案式を弧長法に取り入れ分岐点や極限点などの特異点を正確に求める方法を述べた。そこでは、行列式の微分の符号が変化した時点で、2 分法などを使い範囲を狭めながら特異点を特定できる。また、ニ

ュートン・ラフソン法における解は行列式の微分によって変化するので、それを弧長として利用することが可能である。弧長の設定が自動化できるので、弧長法への影響が大きい基本的パラメーターを減らすことができる。しかし、数値実験の結果からも分かるように、提案式と共にひずみや相当ひずみ量の最大値の絶対値を制限する必要がある、ひずみ制限値で増分量を制御する必要がある。提案法は LDL^T 分解を対象としており、バンド行列は密行列の LDL^T 分解に比べ記憶容量を大幅に節約できる。

立体トラス骨組の数値実験結果から、提案の剛性行列の固有方程式に対する特性方程式の微分値は特異点 (分岐座屈点や極限点) を的確に探索できる。この方法は多くの時間を必要とする固有値問題を解く必要が無く、増分解析時の連立 1 次方程式の解析結果を利用できるので、非常に有効な方法と思われる。今後、多くの数値実験により本法の有効性を確認する予定である。

参考文献

- 1) 吉田 裕：有限要素法による幾何学的非線形構造解析の現状と課題、土木学会論文集、第 374 号、25-37、1986.10.
- 2) 太田 俊昭：新体系土木学会 8 構造物の非弾性解析、技報堂出版、1980.1.
- 3) 久保田 俊昭、野口 祐久：非線形有限要素法の基礎と応用、丸善、1996.12.
- 4) 花井 重考、川島 晃、石丸 麟太郎、田中 尚：増分法による立体トラスの有限変位応力解析、日本建築学会構造系論文集、第 531 号、87-94、2000.5.
- 5) 細野 透：弧長法による弾性座屈問題の解析 (その 1)、日本建築学会論文報告集、第 242 号、41-49、1976.4.
- 6) 鷺津 久一郎、宮本 博、山田 嘉照、山本 義之、川井 忠彦：有限要素法ハンドブック I. II、培風館、1976.4.
- 7) 日本機械学会編：計算力学ハンドブック (有限要素法構造編)、三美印刷、1998.7.
- 8) 藤井 文夫、野口 裕久：剛性行列の LDL^T 分解情報のみを利用した特異点の高速ピンポイント法、計算工学講演会論文集 Vol.5、627-630、2000.5.
- 9) Richrd, R.M. and Abotto, B.J. : Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.101, 511-515, 1975.
- 10) 柏木 光博：共役勾配法による最大あるいは最小固有解の一算定法、日本計算工学会論文集、Vol.1、1-5、1999.5.